

УДК 612.172:004.9

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ В СЕРДЕЧНОЙ МЫШЦЕ ЧЕЛОВЕКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММНОГО ПАКЕТА COMSOL

Дядова А.В., Огородников А.С.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск

РЕЗЮМЕ

Исследование посвящено моделированию электрической системы человеческого сердца. В работе ставится целью создание модели, геометрическая структура которой близка к реальной геометрии человеческого сердца, а процессы, происходящие в сердечной мышце, моделируются на основе решения системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

На первом этапе на основе обзора литературы формулируется концептуальная постановка задачи. В данной работе, исходя из контекста рассматриваемых явлений, концептуальная постановка задачи может быть сформулирована следующим образом: создать модель передачи электрических сигналов, геометрическая структура которой близка к геометрии реальной сердечной мышцы. Для решения этой задачи необходимыми условиями являются изучение возникновения электрических импульсов, процессов их передачи, рассмотрение характера среды, в которой эти импульсы наблюдаются.

Следующий этап технологического цикла – математическая постановка задачи. В данной работе ее можно сформулировать как решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных при заданных начальных и граничных условиях. На этапе построения математической модели возникает необходимость прибегнуть к некоторым допущениям. В частности, следует учитывать тот факт, что геометрия созданной сердечной мышцы будет достаточно упрощенной с усредненными размерами реального сердца ($54 \times 54 \times 70$ мм).

На этапе построения вычислительных алгоритмов к математической модели применяются математические методы с целью ее алгоритмизации. Так как рассматриваемая в данной работе система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных не имеет аналитического решения, для получения результатов принято решение использования численного метода – метода конечных элементов. Для реализации метода конечных элементов выбран математический пакет мультифизического моделирования COMSOL.

На следующем этапе с помощью программы COMSOL Multiphysics проводится построение модели, задание физических параметров, ввод начальных и граничных условий, генерация конечно-элементной сетки. В итоге получено визуальное решение системы уравнений ФитцХью–Нагумо – графики, демонстрирующие процесс распространения электрического сигнала в сердце.

На пятом этапе проводится представление, обработка, анализ и интерпретация полученных результатов. Производятся тестовые расчеты для нахождения оптимального решателя для конкретной задачи.

Таким образом, решаемая задача может быть разбита по этапам вычислительного эксперимента. Прогнозирование на основе построенной модели на данном этапе не представляется возможным, вследствие принятых в модели упрощений, но при более детальном изучении задачи и совершенствовании модели оно может быть выполнено.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: метод конечных элементов, дифференциальное уравнение в частных производных, аритмия сердца, синусовый узел, система уравнений ФитцХью–Нагумо, система уравнений Ходжкина–Хаксли.

Введение

На сегодняшний день большое внимание уделяется проблемам медицины и здоровья человека. В частности, аритмии сердца – широко распространенное сердечное заболевание. Под аритмией понимают учащение ритма и беспорядочное сокращение сердечной

✉ *Огородников Александр Сергеевич*, e-mail: ogorodnikov@sibmail.com

мышцы, которые, в свою очередь, являются результатом ошибочных электрических сигналов [1]. Для исследования аритмий была поставлена задача создания трехмерной модели человеческого сердца и визуализации электрических сигналов, передающихся по всему организму человека.

Для создания такой модели использован пакет моделирования COMSOL. Программный пакет COMSOL Multiphysics позволяет моделировать любые физические процессы, описание которых возможно в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных. Пакет предоставляет полный спектр инструментов для моделирования: построения модели, описания физического процесса, построения сетки разбиения, моделирования и постобработки результатов расчета [2]. Кроме того, в работе использован один из наиболее эффективных решателей на настоящий момент – решатель PARDISO, который позволяет производить параллельные вычисления и сокращать машинное время на решение задачи по сравнению с решателем, стоящим по умолчанию.

Материал и методы

Легковозбудимые среды – это общее понятие, которое используется для моделирования большого числа физических явлений, в частности, распространения электрических сигналов в сердечной мышце [3]. Уравнения ФитцХью–Нагумо для возбудимых сред описывают простейшие физиологические модели с двумя переменными – активатора и ингибитора [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= D u_1 + (a - u_1)(u_1 - 1)u_1 + (-u_2), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= e(b u_1 - g u_2 - d). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u_1 – быстрая переменная (переменная активатора), u_2 – медленная переменная (переменная ингибитора). В этих моделях сердца в точке активатора возбуждается электрический потенциал, а в точке ингибитора возникает электрическое напряжение, соответствующее вероятности открытия пор в мембране для передачи ионного тока.

Кроме того, для реализации описанной модели используются безразмерные переменные u_1 , u_2 и t .

Начальное условие определяет начальное потенциальное распределение потенциалов u_1 и u_2 . Для реализации этого начального распределения в моделях уравнений ФитцХью–Нагумо используются следующие логические выражения:

$$\begin{aligned} u_1(0, x, y, z) &= V0((x + d) > 0)((z + d) > 0), \\ u_2(0, x, y, z) &= V2((-x + d) > 0)((z + d) > 0), \end{aligned} \quad (2)$$

где d – расстояние от оси; x и z образуют x - z -плоскость, а в данных логических выражениях определяется, в какой области находится каждая из точек: в области активатора (1-е выражение) или в области ингибитора (2-е выражение).

Граничные условия (3) как для u_1 , так и для u_2 принимаются изолированными (граничное условие Неймана), основываясь на допущении, что модель закрытая, т.е. ионные токи распространяются внутри сердца, замыкаясь на его поверхности.

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial n} \right|_{M(x,y,z)} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial n} \right|_{M(x,y,z)} = 0, \quad M(x, y, z) \in \Omega \quad (3)$$

где $M(x, y, z)$ – точка, лежащая на поверхности сердца; \bar{n} – вектор нормали.

Участвующие в расчете параметры α , β , γ , ε , δ взяты в безразмерной форме [5].

В контексте распространения электрических сигналов в сердечной мышце человека приведенные выше параметры используются для обозначения определенных характеристик, а именно u_1 в этом случае описывает динамику мембранного потенциала, u_2 – совокупное действие всех трансмембранных ионных токов, отвечающих за восстановление потенциала покоя мембраны. Параметр α контролирует уровень деполяризации мембраны нейрона, ε ($\varepsilon > 0$) определяет скорость изменения ионных токов, параметры δ и β ($\delta > 0$, $\beta > 0$) описывают нелинейные свойства ионных токов. Модель ФитцХью–Нагумо представляет собой в некотором смысле упрощенную модель системы Ходжкина–Хаксли [6], позволяющую наглядно увидеть на фазовых портретах те свойства системы, которые определяют ее качественное поведение, в частности, существование порога возбуждения. Модель ФитцХью–Нагумо дает возможность качественно описывать процесс распространения возбуждения в миокарде и дает хорошую точность моделирования таких наблюдаемых характеристик, как продолжительность импульса и скорость его распространения.

Результаты

В первую очередь для реализации модели сердца в программном пакете потребовалось создание рабочего тела. На рис. 1 представлено полученное геометрическое тело, необходимое для визуализации процессов передачи сигналов.

Метод конечных элементов выбран в качестве наиболее оптимального метода решения системы не-

линейных дифференциальных уравнений в частных производных, использование которого подразумевает введение некоторых упрощений в исходную модель. В частности, поверхность геометрического тела для метода конечных элементов представляет собой набор подобластей, определяемых конечным числом параметров. Этот процесс разбиения обычно занимает значительную часть времени при постановке задачи, а что касается трехмерной сетки, то ее построение является еще более трудоемким процессом.

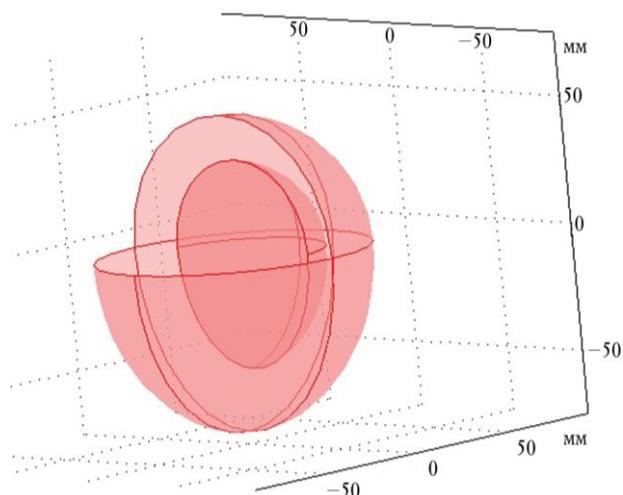


Рис. 1. Геометрическая структура сердца в разрезе

Существует большое количество специализированных программ для создания качественных нерегулярных сеток. Одним из способов создания нерегулярной пространственной сетки (который реализован в пакете COMSOL) является поворот разбитого на конечные элементы поперечного сечения трехмерного объекта вокруг оси симметрии (рис. 2).

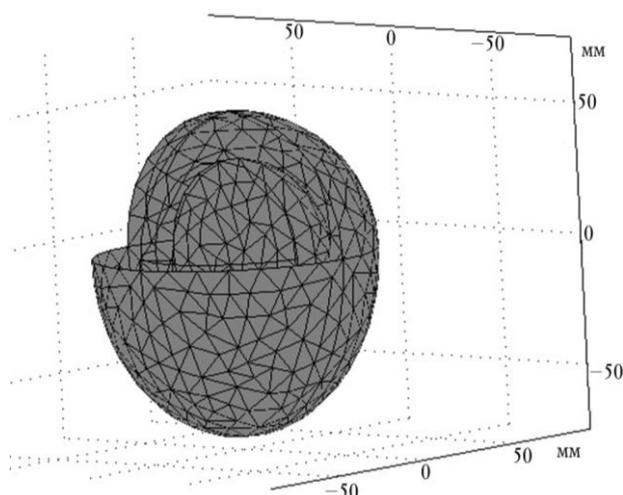


Рис. 2. Получение конечномерной сетки

Таким образом, для описанной геометрической модели с заданным количеством элементов разбиения задача решилась приблизительно за 20 мин на стационарном компьютере.

На рис. 3 представлено распределение электрического потенциала u_1 по поверхности камер сердца.

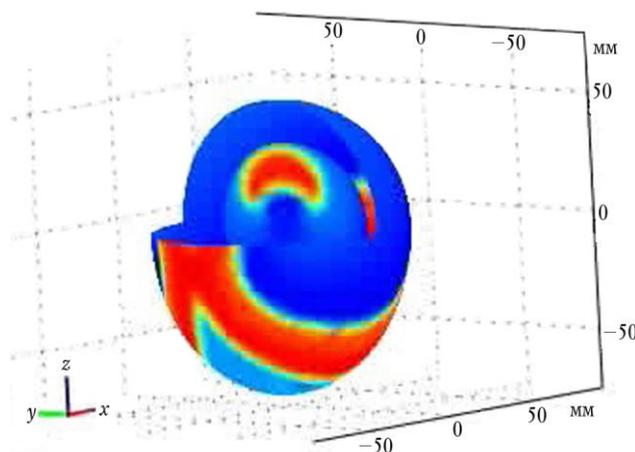


Рис. 3. Представление визуального решения

Наиболее интенсивный красный цвет соответствует наибольшему значению потенциала, синий представляет поверхность, по которой в данный момент времени потенциал не распространяется. Видно, что распределение формируется характерным спиралевидным узором, начинается в том месте, где предположительно в сердце человека находится синусно-предсердный узел, а затем затухает на периферии.

Заключение

Для решения поставленной задачи использовался метод конечных элементов. Была построена трехмерная модель сердца и визуализирована передача электрических сигналов в электрической системе сердца. Следует отметить, что представленные результаты могут быть использованы только как первая оценка качественного поведения, которое можно ожидать от системы при заданных биохимических, физических параметрах тканей. Более правильные результаты моделирования могут быть получены путем изменения элементов формы высшего порядка, оптимизации параметров генерации сетки. В дальнейшем в ходе проведения вычислительных экспериментов необходимо подбирать параметры сетки таким образом, чтобы избежать численной неустойчивости.

Литература

1. Кушаковский М.С. Аритмии сердца. М.: Наука, 1992. С. 24–26.
2. Roger W. Pryor. Multiphysics modeling using COMSOL. 2010. P. 63–90.
3. Асланиди О.В., Морнев О.А. Эхо в возбудимых волокнах

- сердца // Математ. моделирование. 1999. Т. 11. С. 3–22.
4. FitzHugh R.A. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // *Biophys. J.* 1961. P. 445–461.
5. Aliev R.R., Panfilov A.V. A simple two-variable model of cardiac excitation // *Chaos Solutions and Fractals*. 1996.

V. 7, № 3. P. 293–301.

6. Hodgkin A.L., Huxley A.F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // *J. Physiol.* 1952. P. 500–544.

Поступила в редакцию 10.04.2014 г.

Утверждена к печати 07.05.2014 г.

Дядова Арина Викторовна (✉) – магистрант кафедры прикладной математики НИ ТПУ (г. Томск).

Огородников Александр Сергеевич – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики НИ ТПУ (г. Томск).

✉ Огородников Александр Сергеевич, e-mail: ogorodnikov@sibmail.com

THE SIMULATION OF ELECTRICAL SIGNALS PROPAGATION IN THE HEART MUSCLE OF THE HUMAN USING SOFTWARE PACKAGE COMSOL

Dyadova A.V., Ogorodnikov A.S.

National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation

ABSTRACT

This paper is devoted to the modeling of the electrical system of the man's cardiac tissue. The paper aims creating of the model, that geometrical structure is close to the actual geometry of the human heart. The processes occurring in the heart muscle are modeling by solving a system of nonlinear differential equations.

In the first stage, the conceptual problem can be formulated as follows: to create a model of the transmission of electrical signals, the geometrical structure of which is close to the actual geometry of the heart muscle.

The next stage of the technology cycle is a mathematical formulation of the problem. In this paper, it can be formulated as a solution to a system of nonlinear differential equations with given initial and boundary conditions. At the stage of constructing a mathematical model it is necessary to resort to some assumptions. In particular, you should consider the fact that the geometry created by the heart muscle will be enough simplified with the average size of a real heart and will be $54 \times 54 \times 70$ mm.

At the stage of construction of computing algorithms to the mathematical model mathematical methods to its algorithmization was used. As considered in this paper, the system of nonlinear differential equations has no analytic solution, so to get the results it was decided to use a numerical method – the finite element method. To implement the finite element method mathematical modeling package COMSOL was selected.

In the next stage model was built using the COMSOL Multiphysics, including input of the physical parameters, initial and boundary conditions, the finite element mesh generation. As a result, a visual solution of the system FitzHugh–Nagumo has been received; graphs are showing the propagation of the electrical signal in the heart.

In the fifth stage, the representation, processing, analysis and interpretation of the results are given.

Thus, the task can be broken down by stages of computational experiment. Forecasting based on the constructed model at this stage is not possible due to the simplifications in the model, but a more detailed study of the problem can be done.

KEY WORDS: the finite element method, differential equation in partial derivatives, cardiac arrhythmia, sinus node, the FitzHugh–Nagumo equations, the Hodgkin–Huxley equations.

Bulletin of Siberian Medicine, 2014, vol. 13, no. 4, pp. 43–46

References

1. Kushakowski M.S. *Heart Arrhythmia*. Moscow, Science Publ., 1992, pp. 24–26 (in Russian).
2. Roger W. Pryor. *Multiphysics modeling using COMSOL*. 2010. pp. 63–90.
3. Aslanidi O.V., Mornev O.A. Echo in excitable fibers of the heart. *Mathematical Modeling*, 1999, vol. 11, pp. 3–22 (in Russian).
4. FitzHugh R.A. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophys. J.*, 1961, pp. 445–461.
5. Aliev R.R., Panfilov A.V. A simple two-variable model of cardiac excitation. *Chaos Solutions and Fractals*, 1996, vol. 7, no. 3, pp. 293–301.
6. Hodgkin A.L., Huxley A.F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.*, 1952, pp. 500–544.

Dyadova Arina V. (✉), National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation.

Ogorodnikov Alexander S., National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation.

✉ **Ogorodnikov Alexander S.**, e-mail: ogorodnikov@sibmail.com